MA1 – přednáška 7. 12. 2020 – příklady

Diferenciální rovnice – úvod

Co je "diferenciální rovnice":

1) rovnice pro neznámou funkci (nové!);
2) diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi funkcí (kterou je vyjádřena „zkoumaná" veličina a rychlostí jejích změny, případně zrychlením;

Pokud označme hledanou funkci $y = y(x)$, pak rovnicí je dán vztah mezi hodnotami funkce $y(x)$ (tj. hodnotami veličiny) a $y'(x)$, případně $y''(x)$ nebo i derivacemi vyšších řádů.

Diferenciální rovnice pro funkce jedné proměnné $y(x)$, kde je „jen" první derivace $y'(x)$ hledané funkce – jsou 1. ř.,

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu:

obecně $\qquad F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in (a, b)$

speciálně $\qquad y'(x) = F(x, y(x)), \quad x \in (a, b)$

(kde funkce F je funkce tří ~~proměn~~ (resp. dvou) proměnných. F(

Příklady diferenciálních rovnic („známých")

1) **2. Newtonův pohybový zákon pro konstantní síle F:**

$$\frac{d}{dt}(m v(t)) = F \quad , \text{je-li } m \text{ konstantní, pak } m \cdot \frac{dv}{dt} = F:$$

(m – hmotnost, $v(t)$ rychlost pohybu)

$t \in \langle 0, t_0 \rangle$ (zpravidla) (nebo $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$);

známe-li $v(0) = v_0$ (tzv. počáteční podmínku), pak řešení je $\quad v(t) = \frac{F}{m} t + v_0 \quad , \quad t \in \langle 0, t_0 \rangle$

2) <u>Rovnice radioaktivního rozpadu</u> (už byla zmíněna v úvodu k integrálnímu počtu)

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha\, y(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$(\ t \in \langle 0, T \rangle\ )$$

(y(t) je množství radioaktivní látky v čase t, $\alpha > 0$ je konstanta, charakteristická pro danou látku)

3) <u>Podobně růst populace (za ideálních podmínek)</u>:

$$\frac{dm(t)}{dt} = k\, m(t), \quad k > 0, \quad t \geq t_0, \quad m(t_0) = m_0$$

(počáteční podmínka)

4) <u>V chemii</u>:

a) <u>monomolekulární reakce</u>:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\,(a - x(t)), \quad x(0) = 0$$

, kde

$x = x(t)$ je koncentrace látky vznikající, $a > 0$ je koncentrace původní látky v čase $t = 0$, $k > 0$ konstanta.

b) <u>bimolekulární reakce</u>:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\,(a - x(t)) \cdot (b - x(t)), \quad x(0) = 0$$

$x = x(t)$ koncentrace vznikající látky v čase t, $a > 0$ – počáteční koncentrace látky A, $b > 0$ – počáteční koncentrace látky B, $k > 0$ – rychlostní konstanta.

5) Vytékání vody z nádoby (válcové s kruhovým otvorem ve dně)

$h(t)$ značí výšku hladiny vody v čase t, $h(0) = H$

R - poloměr válcové nádoby, r - poloměr kruhového otvoru,

g - gravitační zrychlení

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\left(\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\right)\sqrt{h(t)}, \quad h(0) = H, \quad t \geqq 0$$
$$(h(t) \geqq 0)$$

6) Newtonův ochlazovací zákon

$T(t)$ - teplota, T_0 - počáteční teplota tělesa,

T_v - teplota okolního prostředí (vzduchu, lázně apod.)

$T_v < T_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dT(t)}{dt} = -k\,(T(t) - T_v), & k > 0 \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

7) Usazování částice hmotnosti m v emulzi

(2. Newtonův pohybový zákon)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m \cdot v(t)) = mg - k\,v(t), & k > 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

(odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti pohybu částice (při malých rychlostech))

8) Ředění roztoku :

v čase $t = 0$ je ve V litrech roztoku x_0 - rozpuštěné látky; ředí se - přitéká destilovaná voda rychlostí v l/sec $= v_p$, odtéká roztok stejnou rychlostí; je-li $x(t)$ množství rozpuštěné látky, v čase $t > 0$, je rovnice „ředění“:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{v}{V}\,x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geqq 0$$

Jak se diferenciální rovnice řeší? Obecně je to složitý problém, pokusme se najít cestu k řešení u „lehčích" diferenciálních rovnic – „pomalé" asi integrování.

Je-li dána diferenciální rovnice $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, pak řešením je taková funkce $y = y(x)$, která je def. na nějakém intervalu (a, b), má zde derivaci $y'(x)$ a pro pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

Pokusme se najít řešení diferenciální rovnice

$$(1) \qquad y'(t) = -\alpha y(t) \qquad , t \in R$$

1) vidíme, že $y(t) \equiv 0$, $t \in R$ je řešení (konstantní, nebo se nazývá též stacionární)

2) z „tabulky derivací" najdeme, že též $y(t) = e^{-\alpha t}$, $t \in R$ je řešením rovnice (1)

3) jsou ještě další řešení?
„jako u integrování" – $y(t) = e^{-\alpha t} + c$, $c \in R$?
ne: $(e^{-\alpha t} + c)' = -\alpha e^{-\alpha t} \neq -\alpha(e^{-\alpha t} + c)$
ale $y(t) = c e^{-\alpha t}$, $c \in R$ už jsou řešení:
$$y'(t) = (c e^{-\alpha t})' = c(-\alpha) e^{-\alpha t} = -\alpha y(t), \ t \in R$$

4) ale nejsou ještě další řešení, která jsme „nechodili"? (v 3) a 1)?)
Tedy hledáme odpověď na otázku: je-li $y(t)$ řešení rovnice (1) v R ($t \in R$), existuje $c \in R$ tak, že $y(x) = c e^{-\alpha t}$, $t \in R$?
($c = 0$ by odpovídalo stacionárnímu řešení).

Nechť $y(t)$ je tedy řešení rovnice $y'(t) = -\alpha y(t)$, $t \in R$:
najjme „integrování", pak dostaneme, že pro $t \in R$ je

$$y(t) + c = -\alpha \int y(t)dt \ .$$

Toto je t. zv. integrální rovnice, odkud se dokáží věty o existenci řešení v „teorii" diferenciálních rovnic, ale řešení asi takto „nespočítáme". Zkusme jinak:

Je-li $\qquad y'(t) = -\alpha y(t) \quad , t \in R,$

pak a) je-li $y(t) \neq 0$, $t \in R$, můžeme rovnici upravit:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\alpha$$

a pak snadno (užitím 1VS) integrovat (v R)

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \int -\alpha dt \quad , t \in R \quad ,$$

a tedy $\qquad \ln|y(t)| = -\alpha t + c, \quad t \in R$

a pak $\qquad \underline{|y(t)| = e^{-\alpha t + c}} \ \left(= e^{c} \cdot e^{\alpha t} \right)$

a odstranění absolutní hodnoty:
protože funkce $y(t)$ je funkce spojitá v R (má vlastní $y'(t)$, v R) a je $y(t) \neq 0$ v R, je (vlastnost spojité funkce – nabývání „mezihodnot") buď $y(t) > 0$ (nebo $y(t) < 0$) v R;
je-li $y(t) > 0$, $t \in R$, pak $y(t) = e^{c} \cdot e^{-\alpha t}$, $t \in R$;
$y(t) < 0$, $t \in R$, pak $y(t) = -e^{c} e^{-\alpha t}$, $t \in R$.

Tedy, „dohromady": $\underline{y(t) = K e^{-\alpha t}, \ K \neq 0, \ t \in R}$!
(v případě a)) (což jsme chtěli ukázat)

ale b) nemůže mít rovnice (1) řešení takové, že bude nabývat v R hodnoty nenulové i nulové?

Lze ukázat, že naše diferenciální rovnice (1) taková řešení nemá – aspoň naznačme: pokud $y(x) \neq 0$ v $(a,b) \subset R$, je (dle našeho výpočtu v a) $y(x) = K e^{-\alpha t}$, $t \in (a,b)$, kdyby pak např. $y(b) = 0$, pak díky spojitosti řešení by $\lim\limits_{x \to b-} y(x) = 0$, ale $\lim\limits_{t \to b-} K e^{-\alpha t} = K e^{-\alpha b} \neq 0$ $(K \neq 0)$.

Tedy máme výsledek (přidáme-li k a) ještě stacionární řešení):
všechna řešení rovnice $y'(t) = -\alpha y(t)$, $\alpha > 0$, jsou tvaru

$$y(t) = K e^{-\alpha t}, \quad t \in R, \quad K \in R \quad \ldots\ldots (2).$$

Toto řešení se nazývá „obecné řešení" dané diferenciální rovnice.

Obvykle je třeba řešit t. zv. počáteční úlohu pro danou diferenciální rovnici (nazývá se též Cauchyho úloha):
je zadána t. zv. počáteční podmínka: $y(t_0) = y_0$ (zde $t_0 \in R$, $y_0 \in R$)
(t. j. hledá se řešení, které splňuje tuto „počáteční" podmínku, často v aplikacích $t_0 = 0$, t. j. je zadáno $y(0) = y_0$ – odtud „počáteční")

Takové řešení najdeme zde snadno (dosazením $t = t_0$, $y(t_0) = y_0$ do (2)):

$$y_0 = K e^{-\alpha t_0} \Rightarrow K = y_0 e^{\alpha t_0}$$ a příslušné „počáteční" řešení je

$$y_{poč}(t) = y_0 e^{-\alpha (t - t_0)}, \quad t \in R$$

Tedy (důležité) – ke každé počáteční podmínce existuje právě jedno řešení dané Cauchyho úlohy.

A zkusme „vyřešit" ještě jiné „podobné" diferenciální rovnice, dříve, než postup při řešení rovnice radioaktivního rozpadu zobecníme:

<u>Příklad 2:</u> $\underline{y'(x) = -2x\,y(x)\,,\ y(x_0) = y_0}$ $(x_0 \in R, y_0 \in R)$

(zpravidla se píše $y' = -2xy$)

(i) rovnice řeší (opět) konstantní řešení $y(x) \equiv 0$, $x \in R$;

(ii) nechť $y(x) \neq 0$ v R, pak lze opět rovnici upravit na

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -2x, \quad x \in R$$

a integrací (opět 1VS) dostaneme

$$\ln|y(x)| = -x^2 + c, \quad c \in R, \ x \in R \text{ a tedy}$$

$$|y(x)| = e^{-x^2} \cdot e^c,$$

a analogicky jako v minulém příkladu je zde

$$\underline{y(x) = K e^{-x^2}, \ K \neq 0, \ x \in R}$$

(iii) a opět, jako v minulém příkladu, rovnice nemá řešení, které by nabývalo hodnot nulových i nenulových;

Tedy obecné řešení dané rovnice ((i) a (ii)) je

$$\underline{y(x) = K e^{-x^2}, \ K \in R, \ x \in R},$$

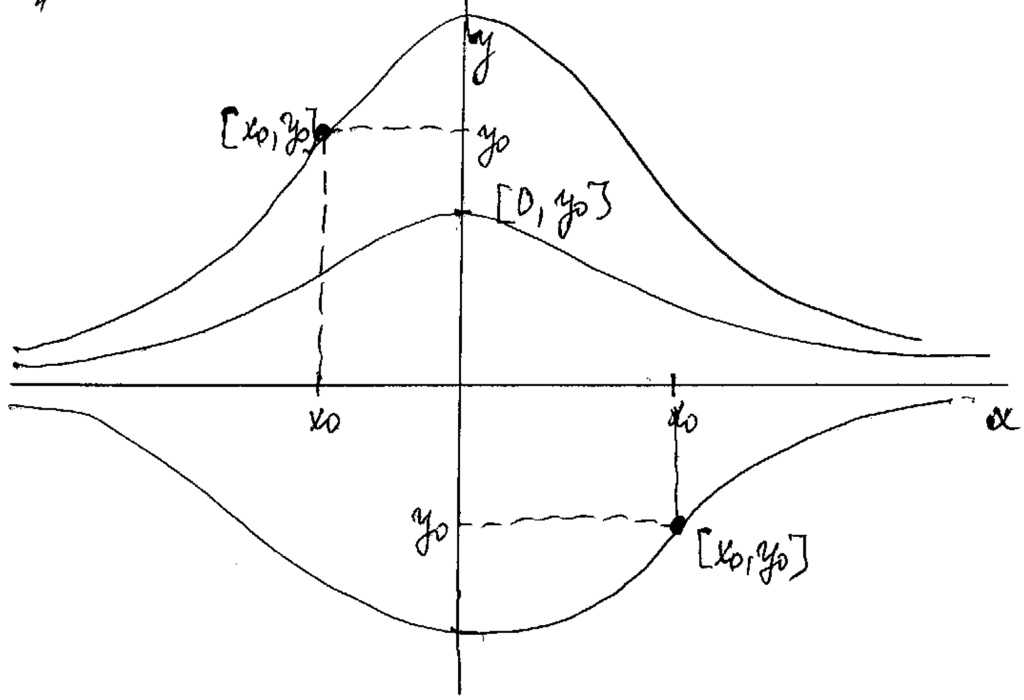
a je-li zadána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in R$, $y_0 \in R$ (lib.), pak opět počáteční úloha (tato) má jediné řešení

$$\underline{y_{poč}(x) = y_0\, e^{-(x^2 - x_0^2)}, \ x \in R},$$

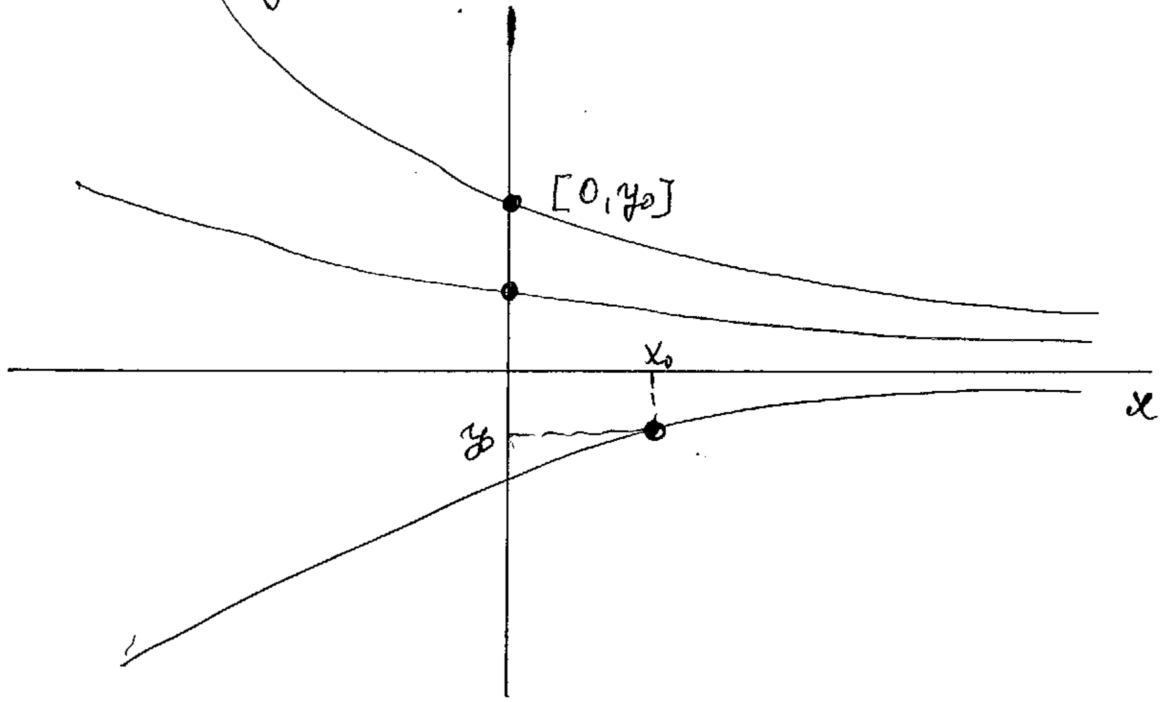
neboť, má-li platit $y_0 = y(x_0)$, tj. $y_0 = K e^{-x_0^2}$, je (odtud) $\underline{K = y_0 \cdot e^{x_0^2}}$

Zkusme si představit „graficky" řešení diferenciální rovnice: graf řešení $y(x)$ dané diferenciální rovnice se nazývá integrální křivka, a počáteční podmínka $y(x_0)=y_0$ udává pak bod $[x_0, y_0]$, kterým integrální křivka, která „znázorňuje" řešení počáteční úlohy, prochází:

Zde:



Příklad 1 $\quad y(x) = K e^{-\alpha t}$, $t \in R$, $K \in R$ $(\alpha > 0)$ (obecné řešení)



Příklad 3. $y' = -\frac{x}{y}$, kde $y(x) \neq 0$

(i) rovnice nemá stacionární řešení

(ii) zkusme rovnici „integrovat" opět pomocí 1VS :

$$y'(x) \cdot y(x) = -x ,$$

„lépe" $2y(x) \cdot y'(x) = -2x$

a integrací: $\int 2y(x)\, y'(x)\, dx = \int -2x\, dx$,

dostaneme $y^2(x) = -x^2 + c$, tj.

$$x^2 + y^2(x) = c \quad ! \quad (*)$$

Tedy, zde má jen $c > 0$, a pak (chceme řešení $y(x)$)

$$y^2(x) = c - x^2$$

tj. odkud pro dané $c > 0$ řešení bude definováno v intervalu $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ (neboť i $c - x^2 > 0$) a

<u>buď $y(x) = \sqrt{c - x^2}$, nebo $y(x) = -\sqrt{c - x^2}$, $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$</u>

Je-li dána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0 \ (\neq 0)$, pak $c = x_0^2 + y_0^2$ (*)

a řešení je

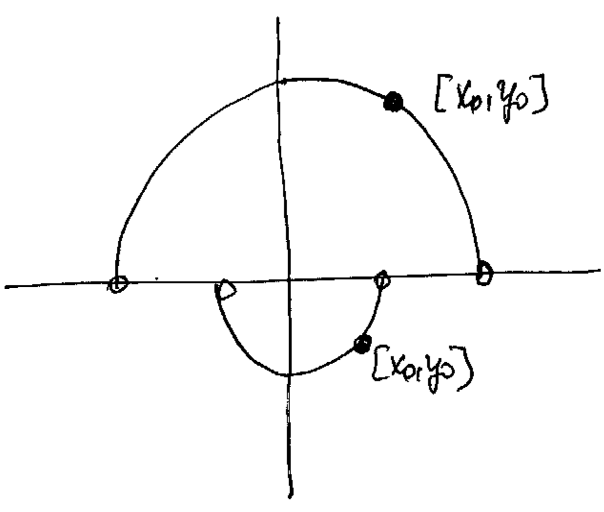
$y(x) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x}$

($y_0 > 0$)

$y(x) = -\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x}$

($y_0 < 0$)

$x \in (-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$



Příklad 4 (rovnice „vytékání" vody z válcové nádoby):

$$h'(t) = -k\sqrt{h(t)}\,, \quad k>0 \quad (h(0)=H\geq 0)\,, \quad t\geq 0$$

(i) stacionární řešení: $h(t)\equiv 0$, $t\in R$

(ii) jinak $h(t)>0$ („kvůli" $\sqrt{h(t)}$); pak opět stejná úvaha – (užití 1VS)

$$\int \frac{h'(t)}{2\sqrt{h(t)}}\,dt = -\int \frac{k}{2}\,dt$$

a

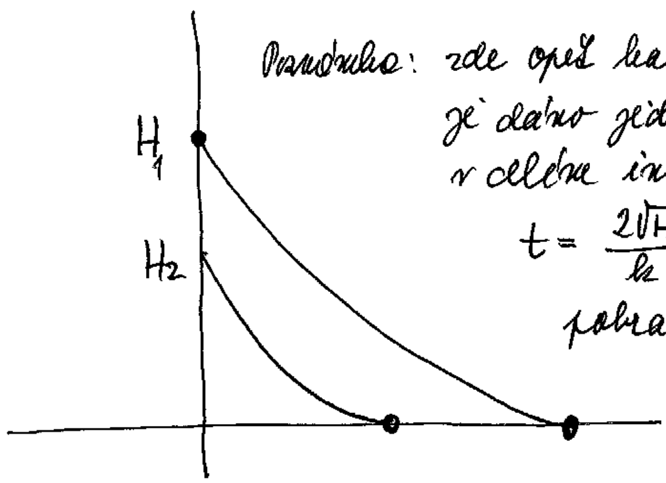
$$\sqrt{h(t)} = -\frac{k}{2}\cdot t + C$$

$$h(t) = \left(C - \frac{k}{2}t\right)^2 > 0, \text{ tj.}$$

„řešení" je pro $t \in \langle 0, \frac{2C}{k}\rangle$, $C>0$.

Pro počáteční podmínku $h(0)=H$ dostaneme: $C=\sqrt{H}$, a

tedy $h_{poč}(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{k}{2}t\right)^2$, $t\in\langle 0, \frac{2\sqrt{H}}{k}\rangle$



Poznámka: zde opět každou počáteční podmínkou $H>0$ je dáno jediné řešení, ale lze řešení uvažovat v celém intervalu $t\in\langle 0,+\infty)$ – v bodě $t=\frac{2\sqrt{H}}{k}$ je řešení $y\left(\frac{2\sqrt{H}}{k}\right)=0$ a dále pokračuje už nulou (tj. „slepí" se se stacionárním řešením)

A obecně: nějaké diferenciální rovnice

(*) $\underline{y' = f(x).g(y), \quad x \in (a,b), y \in (c,d)}$

(diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými)

Pak platí

Věta: Je-li $f(x)$ funkce spojitá v (a,b), $g(y)$ je spojitá v (c,d) a $g(y) \neq 0$ v (c,d), pak pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, existuje právě jedno řešení rovnice $y' = f(x).g(y)$.

Důkaz (a zároveň návod, jak řešení „najít")

Je-li $y(x)$ řešení rovnice (*), pak je

$$y'(x) = f(x).g(y(x)) \quad , \quad x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$$

$g(y(x)) \neq 0$, lze „separovat" a integrovat (1VS):

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int f(x)dx$$

(integrály existují – funkce $f(x)$ je spojitá na (a,b), a $\frac{1}{g(y)}$ je spojitá na (c,d))

Je-li $\int f(x)dx = F(x)$, $x \in (a,b)$, $\int \frac{1}{g(y)}dx = G(y)$, $y \in (c,d)$

dostáváme

$$G(y(x)) = F(x) + c \quad , \quad x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b), \; c \in R$$

a protože dále víme, že $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ v (c,d), tj. $G(y)$ je ryze monotónní v (c,d) a tedy má inversní funkci (G^{-1}), dostaneme

(**) $y(x) = G^{-1}(F(x)+c) \quad , \quad x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$

(řešení nemusí být definováno v celém intervalu (a,b))

Obráceně se snadno dokáže, že $y(x)$ v (**) řeší danou rovnici.

<u>Řešení počáteční úlohy $y(x_0)=y_0$</u> ($x_0\in(a,b)$, $y_0\in(c,d)$))

$$G(y_0) = F(x_0)+C \Rightarrow \underline{C = G(y_0)-F(x_0)}$$

(tj. existuje jediné řešení počáteční úlohy).

<u>Poznámka</u>:

V aplikacích se často píše diferenciální rovnice s $y'(x)=\frac{dy}{dx}(x)$; pak rovnice má tvar $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, $g(y)\neq 0$

a separovat se „dá" takto: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

(používá se).

<u>Jak se pak postupuje při řešení rovnice $y'=f(x)g(y)$, $x\in(a,b)$, $y\in(c,d)$ má-li funkce $g(y)$ nulové body?</u>

1) Je-li $g(\bar{y})=0$, $\bar{y}\in(c,d)$, pak $\underline{y(x)=\bar{y}}$ je řešení dané rovnice, $x\in(a,b)$ –
– <u>stacionární řešení</u>

2) dále řešíme rovnici v intervalech $(c,\bar{y})$ a $(\bar{y},d)$, kde existuje ke každé počáteční podmínce jediné řešení, ale už nemusí řešení být definováno v celém (a,b) (viz příklad 3.)

3) přes stacionární řešení $y(x)=\bar{y}$ může řešení z intervalu $(c,\bar{y})$ „sklouznout" i do intervalu $(\bar{y},d)$ (nebudeme podrobně řešit, ukážeme na příkladu příště)

Ještě shrnutí – příklad 5 (jednodušší)

$$y' = \frac{x}{1+x^2}(1-y) \quad , \quad x\in R \, , \, y \in R$$

(i) $y(x) = 1, \ x\in R$ – stacionární řešení

(ii) $y(x) \neq 1$ v R, pak můžeme „separovat" a integrovat:

$$\int \frac{dy}{1-y} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \qquad (\text{a } 1VS)$$

dostáváme: $\quad -\ln|y-1| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, \quad c\in R$ (lib.)

(a úpravy) $\quad \ln|y-1| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - c \quad$ (i $(-c)\in R$, tedy ke „$-c = \tilde{c}$", $\tilde{c}\in R$)

$$\ln|y-1| = \ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + \ln(e^{\tilde{c}})$$

a pal $\quad |y-1| = e^{\tilde{c}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, , \ x\in R, \ \tilde{c}\in R \ ;$

odstranění absolutní hodnoty u $|y(x)-1|$:

$y(x)-1 \neq 0$ v R, $y(x)$ je spojitá funkce v R, tedy

buď a) $y(x)-1>0$ v R, a pak $\quad y(x) = 1 + e^{\tilde{c}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, , x\in R$

nebo b) $y(x)-1<0$ v R, pak $\quad y(x) = 1 - e^{\tilde{c}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, , x\in R$

(tj. $|y(x)-1| = 1-y(x)$)

(iii) ani u této diferenciální rovnice nebude žádné řešení, tedy by se „slepilo" řešení $y(x)\neq 1$ v nějakém intervalu se „stacionárním" řešením $y(x)=1$, neboť pro lib. $x=a$ je $\lim\limits_{x\to a} y(x) = y(a) \neq 1$ $\left(y(a) = 1 + \frac{K}{\sqrt{1+a^2}}, K = \pm e^{\tilde{c}} (\neq 0)\right)$ pro řešení z (ii).

Tedy, řešení naší úlohy: $y(x) = 1 + \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \, , \ K\neq 0 \ (K = e^{\tilde{c}}, K = -e^{\tilde{c}})$
$x\in R \quad$ (z (ii))

a $\quad y(x) = 1, \ x\in R \quad$ (z (i))

Řešení obecné lze pak napsat „jednou" formulí:

$$y_{ob}(x) = 1 + \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}, \quad k \in R, \; x \in R$$

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

a) $y(0) = 2$: $\quad 2 = 1 + k \Rightarrow k = 1$

1. $y_{poč}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in R$

b) $y(3) = 1$ – jen stacionární řešení:

$$y(x) = 1, \quad x \in R$$